Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Hinweise für die Abiturientinnen und Abiturienten

Abiturprüfung **2001**

Haupttermin **Leistungskurs** M a t h e m a t i k

Bearbeitungszeit: **240** Minuten

Hilfsmittel: Funktionentafel mit mathematischem Formelanhang
Taschenrechner (nicht programmierbar)

Hinweise: Sie erhalten **zwei** Aufgaben.

Sie sind verpflichtet, die Ihnen vorgelegten **zwei** Aufgaben zu bearbeiten.

Verwenden Sie für die Reinschrift und den Entwurf je Aufgabe **einen neuen** Bogen.

Vermerken Sie auf **jedem Bogen** die Nummer der bearbeiteten Aufgaben.

Sie sind verpflichtet, die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben vor Bearbeitungsbeginn (auf Anzahl der Blätter, Anlagen usw.) zu überprüfen.

Lösungen auf den Aufgabenblättern werden nicht gewertet.

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \frac{6x^2}{1+x^2} \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \; .$$

Ihr Schaubild sei K .

a) Untersuchen und zeichnen Sie K.
Untersuchen Sie für $a > 0$ die Anzahl der gemeinsamen Punkte von K und der Parabel $y = ax^2$ in Abhängigkeit von a.

(11 VP)

b) $P(u|v)$ mit $u > 0$ sei ein Punkt auf K. Gegeben sind weiter $Q(0|6)$ und $R(-u|v)$.
Das Dreieck PQR rotiert um die y-Achse.
Gibt es einen Wert von u, für den das Volumen des entstehenden Kreiskegels extremal wird?

$A_D(u)$ gibt den Flächeninhalt des Dreiecks PQR an.

Zeigen Sie, dass gilt: $A_D(u) = \frac{6u}{1+u^2}$.

Berechnen Sie den Mittelwert aller auftretenden Dreiecksinhalte $A_D(u)$ mit $u \in [\,1\,;\,3\,]$.

(10 VP)

c) Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = 6 - \frac{6}{x}$; $x \neq 0$. Ihr Schaubild schließt mit den Geraden $y = 6$, $x = n$ und $x = n+1$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, eine Fläche mit dem Inhalt $A(n)$ ein.
Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) mit $a_n = A(n)$ monoton und beschränkt ist.

Für die Folge (b_n) gilt: $b_n = n \cdot a_n$.
Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen (a_n) und (b_n) . (9 VP)

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Abiturprüfung 2001 | Leistungskurs **Mathematik** Analysis | Aufgabe **I 2**

Haupttermin

Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$f(x) = \frac{2}{1+e^{x}} \;;\; x \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{2}{1+e^{1-x}} \;;\; x \in \mathbb{R} \;.$$

Ihre Schaubilder seien K_f und K_g .

a) Ermitteln Sie die Asymptoten und den Wendepunkt von K_f .
Untersuchen Sie f auf Monotonie und geben Sie den Wertebereich von f an.
Zeichnen Sie K_f samt Asymptoten. (8 VP)

b) K_g entsteht aus K_f durch Spiegelung an der Geraden $x = \frac{1}{2}$.

Begründen Sie diesen Sachverhalt.

Skizzieren Sie K_g in das Koordinatensystem von Teilaufgabe a) .

Geben Sie den Wertebereich und das Monotonieverhalten von g sowie den Wendepunkt von K_g an. (7 VP)

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion g die Differenzialgleichung

$$g'(x) = \frac{1}{2} g(x) \cdot [2 - g(x)] \quad \text{erfüllt.}$$

Welche Form von Wachstum wird demzufolge von g beschrieben?
Geben Sie charakteristische Eigenschaften dieser Wachstumsform an.

(7 VP)

d) Die momentane Änderungsrate des Energieverbrauchs (in $10^8 \frac{\text{kWh}}{\text{Jahr}}$) eines Landes ab dem Jahr 1990 wird in guter Näherung durch g(x) mit $x \geq 0$ (x in Jahren ab Anfang 1990) beschrieben.
Zu welchem Zeitpunkt erreicht diese momentane Änderungsrate 98% ihres Sättigungswertes?
In welchem Jahr verlangsamt sich erstmals die Zunahme der momentanen Änderungsrate des Energieverbrauchs?
Berechnen Sie den gesamten Energieverbrauch im Zeitraum von Anfang 1990 bis Ende 2000 .

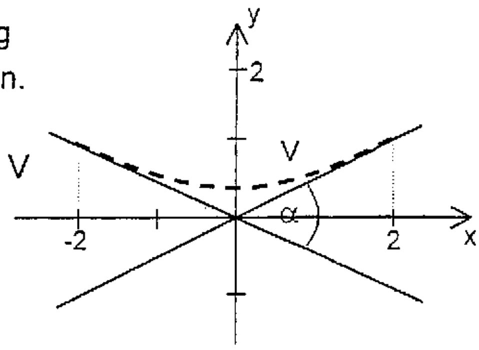
(8 VP)

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Abiturprüfung 2001 | <u>Leistungskurs</u> **Mathematik** Analysis | Aufgabe **I 3**

<u>Haupttermin</u>

Zwei geradlinig verlaufende Straßen bilden an ihrer Kreuzung einen Winkel α von etwa 53° . Diese Kreuzung soll durch ein zusätzliches Straßenstück entlastet werden. Die Situation kann in einem geeigneten Koordinatensystem durch zwei Geraden und eine Verbindungskurve V dargestellt werden. Dabei mündet V an den Stellen -2 und 2 ohne Knick in die Geraden ein. (siehe Skizze, Maßangaben in km)



a) Zeigen Sie, dass man für die beiden Geraden die Gleichungen

$y = \frac{1}{2}x$ bzw. $y = -\frac{1}{2}x$ verwenden kann.

Die Verbindungskurve V wird durch eine Funktion f beschrieben. Welchen Bedingungen muss die Funktion f deshalb genügen?

An den Übergangsstellen soll außerdem $f''(-2) = f''(2) = 0$ gelten.

Begründen Sie, dass $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ einen möglichen Ansatz darstellt, wenn alle genannten Bedingungen erfüllt sein sollen.

Bestimmen Sie f(x) . (Teilergebnis: $f(x) = -\frac{1}{128}x^4 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{8}$) (8 VP)

b) Ein weiterer Vorschlag sieht als Verbindungskurve das Schaubild der Funktion g vor mit

$g(x) = 1 + \ln\left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}\right)$.

Prüfen Sie, ob diese Verbindungskurve ebenfalls ohne Knick in die Geraden einmündet. Zeichnen Sie diese Verbindungskurve und die Geraden aus Teilaufgabe a) in einem geeigneten Koordinatensystem. (7 VP)

c) Die beiden Vorschläge aus den Teilaufgaben a) und b) sollen hinsichtlich des Landschaftsverbrauchs verglichen werden, indem jeweils der Inhalt des Flächenstücks zwischen den Geraden und der Verbindungskurve bestimmt wird.
Berechnen Sie den Inhalt für den Vorschlag aus Teilaufgabe a) exakt und für den aus Teilaufgabe b) mithilfe des Simpson-Verfahrens (8 Teilintervalle für [-2 ; 2]). (8 VP)

d) Erstellen Sie einen dritten Vorschlag für eine Verbindungskurve auf der Grundlage einer trigonometrischen Funktion h, die $h''(-2) = h''(2) = 0$ erfüllt. (7 VP)

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Abiturprüfung 2001 | Leistungskurs **Mathematik** Analytische Geometrie | Aufgabe **II 1**

Haupttermin

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(-4| 1| 1) , B(-2| 0| 1) , C(4| 1|-3) sowie die Ebene E_1: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9$ gegeben.

Die Gerade g ist die Lotgerade zu E_1 durch den Ursprung O(0|0|0) .

Die Ebene E_2 enthält die Punkte A, B und C.

a) Die Koordinatenebenen und die Ebene E_1 legen eine Pyramide fest.
Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide.
Berechnen Sie den Inhalt ihrer Oberfläche.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E_2.
Die Gerade g schneidet E_1 im Punkt P.
Berechnen Sie die Koordinaten von P und zeichnen Sie P in das Schrägbild ein.
Berechnen Sie den Abstand der Ebenen E_1 und E_2 .
Ermitteln Sie Gleichungen der Ebenen, die von E_1 den doppelten Abstand haben wie von E_2.

(13 VP)

b) Die Kugel K mit Mittelpunkt $M(\frac{1}{3}|\frac{2}{3}|\frac{2}{3})$ schneidet die Ebene E_1 in einem Kreis mit Radius $r_1 = \sqrt{5}$.

Bestimmen Sie den Radius von K.

Untersuchen Sie, ob der Schnittkreis von K mit E_1 die x_1x_2-Ebene berührt.

(7 VP)

c) Die Gerade g schneidet die Kugel K* mit Mittelpunkt $M(\frac{1}{3}|\frac{2}{3}|\frac{2}{3})$ und Radius 3 in einem Punkt Q mit positiven Koordinaten.

Geben Sie eine Gleichung der Tangentialebene in Q an K* an.

Eine Tangente in Q an K* hat einen Schnittpunkt mit der x_3-Achse.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente in Q an K*, die von der x_3-Achse den größten Abstand hat.

(10 VP)

Gegeben ist für jedes $k \in \mathbb{R}$ die Ebene E_k: $kx_1 + x_2 - x_3 - 2k = 0$

sowie für $t > 0$ die Kugel K_t: $\vec{x}^2 - \begin{pmatrix} 4t \\ 0 \\ -2t \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 4t^2 = 0$.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s von E_1 und E_2.
Prüfen Sie, ob s in allen Ebenen E_k liegt.
Welchen Abstand hat s vom Ursprung?
Welcher Bedingung müssen k_1 und k_2 genügen, damit die Ebenen E_{k_1} und E_{k_2} senkrecht aufeinander stehen?
Berechnen Sie diejenigen Werte von k, für die der Punkt $P(5|7|1)$ von E_k den Abstand $\sqrt{3}$ hat. (8 VP)

b) Wie lautet eine Gleichung der Geraden g, auf der die Mittelpunkte aller Kugeln K_t liegen?
Zeigen Sie, dass diese Gerade in der x_1x_3-Ebene liegt und die x_1-Achse Tangente an jede Kugel K_t ist.
Zeichnen Sie die Schnittkreise der Kugeln K_1 , K_2 und K_3 mit der x_1x_3-Ebene sowie die Gerade g in ein gemeinsames zweidimensionales Koordinatensystem ein.
(7 VP)

c) Für welche Werte von t mit $t > 1$ schneiden sich K_1 und K_t?
Bestimmen Sie für diesen Fall eine Gleichung der Ebene, in der der Schnittkreis liegt.
Begründen Sie, dass verschiedene Schnittkreise in zueinander parallelen Ebenen liegen.
(7 VP)

d) In einer Population vererbt jedes Individuum auf seinen einzigen Nachkommen ein bestimmtes Merkmal in den Ausprägungen A, B oder C.

Die Übergangsmatrix für diese Vererbung lautet:

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix} .$$

Dabei bedeuten z.B. die Einträge in der ersten Spalte der Matrix:
Von den Individuen mit Merkmalsausprägung A haben 20% einen Nachkommen mit A, 80% einen Nachkommen mit B und keines einen Nachkommen mit C.
Zu Beginn sind die Merkmalsausprägungen A, B und C in der Population wie 70 : 20 : 10 verteilt.
Wie ist das Verhältnis nach zwei Vererbungsschritten?

Geben Sie eine Verteilung der Merkmalsausprägungen an, die in allen nachfolgenden Generationen stabil bleibt.

Bestimmen Sie eine Matrix, die den Übergang von einer Generation zur übernächsten Generation direkt beschreibt.

(8 VP)